CONTOH SOAL INDUKSI MATEMATIKA KELAS 11

A. Silahkan kerjakan contoh soal Induksi Matematika Kelas 11

1. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa:
   1.2+2.3+3.4+⋯+n(n+1)=13n(n+1)(n+2)

   Pembahasan:

Langkah 1.

$U_n = n(n+1)$

$U_1 = 1(1+1) = 2$

$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$S_1 = \frac{1}{3}.1.\,(1+1)(1+2) = 2$

$2 = 2$

Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.

Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k , sehingga:

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+2)$

$\underbrace{1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1)}_{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

Kita buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan
dengan melakukan modifikasi terhadap ruas kiri.

$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$

$= (k+1)(k+2)(\frac{1}{3}k+1)$

$= (k+1)(k+2)\frac{(k+3)}{3}$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ [benar]

Kesimpulan:

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ [terbukti]

2. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa:
12+22+32+⋯+n2=16n(n+1)(2n+1)12+22+32+⋯+n2=16n(n+1)(2n+1)

Pembahasan:

Langkah 1.

$U_n = n^2$

$U_1 = 1^2 = 1$

$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$S_1 = \frac{1}{6}.1(1+1)(2.1+1) = 1$

$1 = 1$

Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.

Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$

Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2k+2+1).$

$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}_{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} + (k+1)^2$

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$

Kita buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan dengan melakukan modifikasi terhadap ruas kiri.

$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

$= \frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2]$

$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$

$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]$

$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6]$

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$ [benar]

Kesimpulan:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$ [terbukti]

3. Buktikan bahwa:
   2+4+6+⋯+2n=n(n+1)

   Pembahasan:

Langkah 1.
$U_n = 2n$
$U_1 = 2.1 = 2$
$S_n = n(n+1)$
$S_1 = 1(1+1) = 2$
$2 = 2$
Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.
Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:
$2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$

Langkah 3.
Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.
$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)(k+1+1)$

$\underbrace{2+4+6+\cdots+2k}_{k(k+1)}+2(k+1) = (k+1)(k+2)$

Kita buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan
dengan melakukan modifikasi terhadap ruas kiri.
$k(k+1)+2(k+1) = k^2+k+2k+2$
$= k^2+3k+2$
$= (k+1)(k+2)$ [benar]

Kesimpulan:
$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ [terbukti]

4. Buktikan dengan induksi matematika bahwa:
   1+3+5+⋯+(2n−1)=n2

   Pembahasan:

Langkah 1.
$U_n = 2n - 1$
$U_1 = 2.1 - 1 = 1$
$S_n = n^2$
$S_1 = 1^2 = 1$
$1 = 1$
Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.
Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

Langkah 3.
Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.
$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{k^2} + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$
Kita buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan
dengan melakukan modifikasi terhadap ruas kiri.
$k^2 + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 2 - 1$
$= k^2 + 2k + 1$
$= (k + 1)^2$ [benar]

Kesimpulan:
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ [terbukti].

5. Dengan induksi matematika, buktikan bahwa:
   1+2+3+⋯+n=12n(n+1)

   Pembahasan:

Langkah 1.

$U_n = n$

$U_1 = 1$

$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$S_1 = \frac{1}{2}.1.(1+1) = 1$

$1 = 1$

Untuk n = 1, rumus atau teorema benar.

Langkah 2.

Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)$$

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{\frac{1}{2}k(k+1)}+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Kita buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan
dengan melakukan modifikasi tehadap ruas kiri.

$$\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+\frac{2}{2}(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(k^2+k+2k+2)$$

$$= \frac{1}{2}(k^2+3k+2)$$

$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ [benar]

Kesimpulan:

$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ [terbukti]

6. Buktikan dengan induksi matematika bahwa:
   23+43+63+⋯+(2n)3=2n2(n+1)2

   Pembahasan:

Langkah 1.

$$U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$U_1=\frac{1}{(2.1-1)(2.1+1)}=\frac{1}{3}$$
$$S_n=\frac{n}{2n+1}$$
$$S_1=\frac{1}{2.1+1}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.

Anggap rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}$$

Langkah 3.

Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}}$$
$$+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Kita akan buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan.

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k+1}{2k+3}\ \text{[benar]}$$

Kesimpulan:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{n}{2n+1}\ \text{[terbukti]}$$

7. Buktikan dengan induksi matematika bahwa:
   (an−bn)(an−bn) habis dibagi (a−b)

   Pembahasan:

   Langkah 1.
   Untuk n = 1.
   $(a^1 - b^1) = (a - b)$ habis dibagi $(a - b)$.
   Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

   Langkah 2.
   Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:
   $(a^k - b^k)$ habis dibagi $(a - b)$

   Langkah 3.
   Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.
   $a^{k+1} - b^{k+1} = a.\,a^k - b.\,b^k$
   $= a(a^k - b^k) + (a - b)b^k$
   Karena pada langkah 2 kita sudah anggap bahwa $(a^k - b^k)$ habis dibagi $(a - b)$, maka $a(a^k - b^k)$ pasti habis dibagi oleh $(a - b)$. Karena $(a - b)$ habis dibagi $(a - b)$, maka $(a - b)b^k$ pasti habis dibagi oleh $(a - b)$.
   Berarti, $a(a^k - b^k) + (a - b)b^k$ habis dibagi $(a - b)$.
   [benar]

   Kesimpulan:
   $(a^n - b^n)$ habis dibagi $(a - b)$ [terbukti]

8. Buktikan dengan prinsip induksi matematika untuk semua bilangan asli n, berlaku:
3n≥2n+1

Pembahasan:

Langkah 1.
untuk n = 1.
$3^1 \geq 2.1 + 1$
$3 \geq 3$
teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.
Anggap bahwa teorema benar untuk n = k, sehingga:
$3^k \geq 2k + 1$

Langkah 3.
Akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk n = k + 1.

$3^{k+1} \geq 2(k + 1) + 1$
$3^{k+1} \geq 2k + 3$
$3^{k+1} = 3.3^k$
$3^{k+1} \geq 3.(2k + 1)$ karena $3^k \geq 2k + 1$
$3^{k+1} \geq 6k + 3$
$3^{k+1} \geq 2k + 3$ karena $6k \geq 2k$
$3^{k+1} \geq 2(k + 1) + 1$ [benar]

Kesimpulan:
$3^n \geq 2n + 1$ [terbukti]

9. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, buktikan bahwa: (n+1)2>n2+4(n+1)2>n2+4 untuk n≥2n≥2.

   Pembahasan:

   Langkah 1.

   Untuk n = 2.

   $(n+1)^2 > n^2+4$

   $(2+1)^2 > 2^2+4$

   $9 > 8$

   Teorema benar untuk n = 2.

   Langkah 2.

   Anggap bahwa teorema benar untuk $n = k$, sehingga:

   $(k+1)^2 > k^2+4$

   Langkah 3.

   Akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk $n = k+1$.

   $(k+2)^2 > (k+1)^2+4$

   $(k+2)^2 > k^2+4+2k+1$

   $(k+2)^2 = k^2+4k+4$

   $(k+2)^2 = k^2+2k+1+2k+3$

   $(k+2)^2 = (k+1)^2+2k+3$

   $(k+2)^2 > k^2+4+2k+3$ (karena $(k+1)^2 > k^2+4$)

   $(k+2)^2 > k^2+4+2k+1$ (karena $(2k+3 > 2k+1)$)[benar]

   Kesimpulan:

   $(n+1)^2 > n^2+4$ [terbukti]

10. Buktikan dengan induksi matematika bahwa:
(an−bn)(an−bn) habis dibagi (a−b)

Pembahasan:

Langkah 1.
Untuk n = 1.
$(a^1 - b^1) = (a - b)$ habis dibagi $(a - b)$.
Rumus atau teorema benar untuk n = 1.

Langkah 2.
Anggap bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k, sehingga:
$(a^k - b^k)$ habis dibagi $(a - b)$

Langkah 3.
Akan dibuktikan bahwa rumus atau teorema benar untuk n = k + 1.
$a^{k+1} - b^{k+1} = a.a^k - b.b^k$
$= a(a^k - b^k) + (a - b)b^k$
Karena pada langkah 2 kita sudah anggap bahwa $(a^k - b^k)$ habis dibagi $(a - b)$, maka $a(a^k - b^k)$ pasti habis dibagi oleh $(a - b)$. Karena $(a - b)$ habis dibagi $(a - b)$, maka $(a - b)b^k$ pasti habis dibagi oleh $(a - b)$.
Berarti, $a(a^k - b^k) + (a - b)b^k$ habis dibagi $(a - b)$.
[benar]

Kesimpulan:
$(a^n - b^n)$ habis dibagi $(a - b)$ [terbukti]