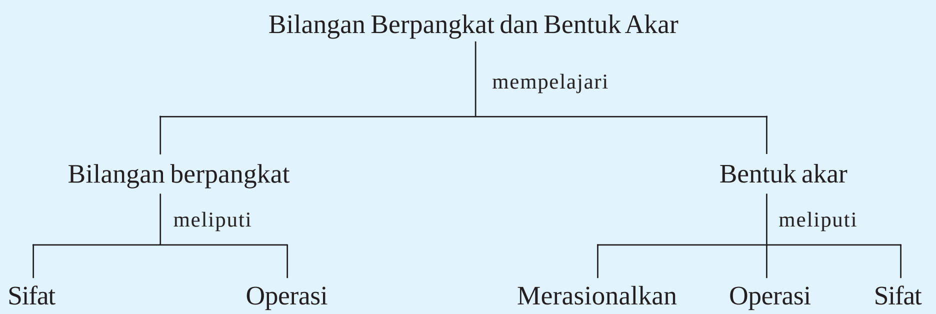
BAB IV

BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

Peta Konsep



Kata Kunci

1. Pangkat
2. Akar
3. Sifat
4. Operasi
5. Merasionalkan
6. Akar sekawan

Sumber: www.tee-za.net

Gambar 4.1 Regu gerak jalan

Dalam suatu lomba gerak jalan, setiap regu terdiri dari 27 orang yang disusun menjadi 9 baris dan tiap baris terdiri dari 3 orang. Kemudian 9 baris tersebut dibagi menjadi 3 bagian dan tiap-tiap bagian terdiri dari 3 baris, yaitu bagian depan, tengah, dan belakang. Masing-masing bagian diberi jarak 1 baris. Hal ini dilakukan untuk memudahkan dewan juri dalam mengecek jumlah orang tiap regu. Jika tiap regu terdiri dari 3 bagian dan tiap bagian terdiri dari 3 baris, serta tiap baris terdiri dari 3 orang maka jumlah peserta dalam regu tersebut tepat 27 orang.

Untuk menuliskan jumlah tiap regu dalam permasalahan di atas, sebenarnya dapat dilakukan dengan cara yang lebih efektif dan efisien, yaitu dengan cara notasi bilangan berpangkat. Agar lebih memahami bilangan berpangkat dan bentuk akar, pelajarilah bab ini sehingga kalian dapat mengidentifikasi sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, melakukan operasi aljabar yang melibatkan bilangan berpangkat dan bentuk akar, serta dapat memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan materi ini.

A. Bilangan Berpangkat Bilangan Bulat

Setiap manusia yang hidup pasti dia akan membutuhkan sesuatu atas dirinya seperti makan, bernafas, pakaian, tempat tinggal, dan lain-lain. Kebutuhan-kebutuhan manusia sebagian besar diperoleh tidak dengan cuma-cuma. Diperlukan sebuah usaha untuk mendapatkannya baik mencari, membeli, dan usaha-usaha yang lainnya.

Untuk membeli sebuah kebutuhan, kadang manusia harus mengeluarkan uang dalam jumlah besar. Misal untuk membeli rumah mewah manusia harus mengeluarkan uang sebesar 1 milyar rupiah. Jika dalam matematika 1 milyar dapat dituliskan dengan 1.000.000.000. Agaknya untuk menuliskan jumlah tersebut terlalu panjang, dapat juga dituliskan dalam bentuk baku yaitu 1×10^9. Nah, bilangan yang dituliskan sebagai 10^9 inilah yang disebut sebagai bilangan berpangkat. Dalam hal ini 10 disebut bilangan pokok, sedangkan 9 disebut bilangan pangkat. Karena pangkatnya bilangan bulat, maka disebut bilangan berpangkat bilangan bulat.

1. Bilangan Berpangkat Sederhana

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menemui perkalian bilangan-bilangan dengan faktor-faktor yang sama. Misalkan kita temui perkalian bilangan-bilangan sebagai berikut.

$2 \times 2 \times 2$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

Perkalian bilangan-bilangan dengan faktor-faktor yang sama seperti di atas, disebut sebagai perkalian berulang. Setiap perkalian berulang dapat dituliskan secara ringkas dengan menggunakan notasi bilangan berpangkat. Perkalian bilangan-bilangan di atas dapat kita tuliskan dengan:

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ (dibaca 2 pangkat 3)

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ (dibaca 3 pangkat 5)

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$ (dibaca 6 pangkat 6)

Bilangan 2^3, 3^5, 6^6 disebut bilangan berpangkat sebenarnya karena bilangan-bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian berulang.

Bilangan berpangkat a^n dengan n **bilangan bulat positif** didefinisikan sebagai berikut.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Contoh 4.1

1. $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
2. $7^6 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
3. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh sifat-sifat berikut ini.

Misalkan $a, b \in R$ dan m, n adalah bilangan bulat positif.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{b^m} = a^{m-n}, m > n$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

2. Bilangan Berpangkat Nol

Perhatikan kembali rumus $\frac{a^m}{b^m} = a^{m-n}$ pada pembahasan sebelumnya. Jika dipilih $m = n$ maka diperoleh:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{n-n}$$

$$1 = a^0$$

Jadi, $a^0 = 1$, dengan $a \neq 0$.

Contoh 4.2

1. $6^0 = 1$
2. $(-45)^0 = 1$

3. Bilangan Berpangkat Negatif

Apa yang terjadi jika $m = 0$?

Dari pembahasan di atas jika dipilih $m = 0$, maka:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^o} = a^{0-n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Jadi, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, dengan $a \neq 0$.

Contoh 4.3

1. $16^{-3} = \frac{1}{16^3}$

2. $14^{-3} = \frac{1}{14^2}$

Latihan 4.1

1. Tentukan hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.
   a. 6^3 c. -4^2
   b. $(-5)^4$ d. $(-3x)^5$
2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dengan pangkat negatif.
   a. $\frac{1}{32}$ b. c. 0,0001
3. Tentukan hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.
   a. -4^{-3} c. 4^{-6}
   b. $(-3x)^{-4}$ d. $5y^{-4}$

4. Suatu unsur radioaktif memiliki waktu paro $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$ 80 tahun. Tentukan waktu

(t) yang dibutuhkan agar aktivitasnya (A) 25% dari nilai awalnya (A_0).

Petunjuk: $\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$

B. Bilangan Pecahan Berpangkat

Untuk menentukan hasil pemangkatan bilangan pecahan berpangkat dapat di gunakan definisi bilangan berpangkat. Jika $a, b \in$ B, $b \neq 0$, n adalah bilangan bulat positif maka:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ faktor}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ faktor}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

$\frac{Xn+1}{2}$

Jadi, . $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Contoh 4.4

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
2. $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4^4}{5^4} = \frac{256}{625}$

Bilangan $a^{\frac{m}{n}}$ dengan a bilangan bulat dan $n \neq 0$ didefinisikan sebagai berikut.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in B,\ a \neq 0$$

Bilangan $a^{\frac{m}{n}}$ disebut bilangan berpangkat tak sebenarnya.

Contoh 4.5

1. $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$
2. $8^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{8^4}$

Latihan 4.2

1. Tentukan hasil perpangkatan dari bilangan-bilangan berikut.

   a. $(16)^{\frac{1}{2}}$

   b. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

   c. $\left(64x^3\right)^{\frac{1}{3}}$

   d. $\left(\frac{8}{128}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk akar.

   a. $5^{\frac{1}{2}}$

   b. $7^{3\frac{2}{5}}$

   c. $x^{-\frac{4}{5}}$

   d. $-(ab)^{\frac{3}{4}}$

3. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk pangkat positif.

   a. $\sqrt[3]{a^4}$

   b. $\sqrt[4]{5^{-3}}$

   c. $\frac{3}{\sqrt[4]{5^3}}$

   d. $\sqrt[2]{x^3 y^6}$

4. Tentukan hasil perpangkatan bilangan berikut ini.

   a. $ab^{\frac{1}{2}} : \sqrt{bc}$

   b. $64^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}$

   c. $0,2^{\frac{3}{2}} : 0,2^{\frac{1}{2}}$

   d. $a^{\frac{1}{2}}b : abc^{\frac{1}{3}}$

5. Nyatakan bentuk perpangkatan berikut menjadi bentuk pangkat positif.

   a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}$

   b. $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{3}c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-1}c^{-2}}$

   c. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}$

   d. $\left(\frac{2}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$

C. Bentuk Akar

Dalam matematika kita mengenal berbagai jenis bilangan. Beberapa contoh jenis bilangan diantaranya adalah bilangan rasional dan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk , $\frac{m}{n}$ dengan $m, n \in$ B dan $n \neq 0$. Contoh bilangan rasional seperti: $\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{3}{4}$, 5, 3 dan seterusnya. Sedangkan bilangan irrasional adalah bilangan riil yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan $m, n \in$ B dan $n \neq 0$. Bilangan-bilangan seperti $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{4}$ termasuk bilangan irrasional, karena hasil akar dari bilangan tersebut bukan merupakan bilangan rasional.

Bilangan-bilangan semacam itu disebut bentuk akar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk akar adalah akar-akar dari suatu bilangan riil positif, yang hasilnya merupakan bilangan irrasional.

1. Operasi Hitung Bentuk Akar

Dua bilangan bentuk akar atau lebih dapat dijumlahkan, dikurangkan, maupun dikalikan.

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Untuk memahami cara menjumlahkan dan mengurangkan bilangan-bilangan dalam bentuk akar, perhatikan contoh - contoh berikut.

1. $4\sqrt{3}+3\sqrt{3} = (4+3)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
2. $6\sqrt{5}-3\sqrt{5} = (6-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{5}$

Dari contoh di atas, maka untuk menjumlahkan dan mengurangkan bilangan-bilangan dalam bentuk akar dapat dirumuskan sebagai berikut.

Untuk setiap *a*, *b*, dan *c* bilangan rasional positif, berlaku hubungan:

$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ dan $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

Contoh 4.6

1. $7\sqrt{7}+4\sqrt{7}-\sqrt{7}$
2. $\sqrt{5}-6\sqrt{5}+7\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}+7\sqrt{32}$
4. $6\sqrt{27}-3\sqrt{12}-\sqrt{3}$

Penyelesaian:

1. $7\sqrt{7}+4\sqrt{7}-\sqrt{7} = (7+4-1)\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$
2. $\sqrt{5}-6\sqrt{5}+7\sqrt{5} = (1-6+7)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}+7\sqrt{32} = 3\sqrt{2}+(4\times 2)\sqrt{2}+(7\times 4)\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 28\sqrt{2}$

$= (3 + 8 + 28)\sqrt{2}$

$= 39\sqrt{2}$

4. $6\sqrt{27} - 3\sqrt{12} - \sqrt{3} = (6x3)\sqrt{3} - (3x2)\sqrt{3} - \sqrt{3}$
$= 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{3}$
$= (18 - 6 - 1)\sqrt{3}$
$= 11\sqrt{3}$

b. Perkalian Bentuk Akar

Untuk sembarang bilangan bulat positif *a* dan *b* berlaku sifat perkalian berikut.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Sifat di atas sekaligus dapat digunakan untuk menyederhanakan bentuk akar.

Contoh 4.7

1. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$
2. $\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

Penyelesaian:

1. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} \times \sqrt{5}\right)$
$= 3\left(\sqrt{3} \times \sqrt{2}\right) - \sqrt{15}$
$= 3\sqrt{6} - \sqrt{15}$

2. $\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

$= \left(\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{6} \times \sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}\right)$

$\left(2\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)$

$$= 3\left(\sqrt{6}\times\sqrt{2}\right)-\sqrt{18}+\left\{(2\times 3)\left(\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\right\}$$

$$- \quad 2\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{12}-\sqrt{18}+(6\times 2)-2\sqrt{6}$$

$$= (3\times 2)\sqrt{3}-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{3}-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}$$

c. *Pemangkatan Bilangan Bentuk Akar*

Bentuk akar juga dapat dipangkatkan. Adapun pemangtkatan bentuk akar akar didapat beberapa sifat.

1) Pemangkatan bentuk $\left(\sqrt[p]{a}\right)^n$

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \underbrace{\sqrt[p]{a}\times\sqrt[p]{a}\times\sqrt[p]{a}\times\ldots\times\sqrt[p]{a}}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \sqrt[p]{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ faktor}}}$$

$$= \sqrt[p]{a^n}$$

Jadi, . $\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \sqrt[p]{a^n}$

Contoh 4.8

1. $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$

2. $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$

2) *Pemangkatan bentuk* $\sqrt[p]{a}$ *dengan pangkat negatif*

Bentuk akar dengan pangkat negatif sama halnya dengan bilangan berpangkat bilangan negatif. Sehingga:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\sqrt[p]{a}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}$$

Contoh 4.9

$$\left(\sqrt[2]{3}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\sqrt[2]{3}\right)^5} = \frac{1}{\sqrt[2]{3^5}}$$

3) *Pemangkatan bentuk* $\left(a+\sqrt{b}\right)^2$ *dan* $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(a+\sqrt{b}\right)^2 = \left(a+\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right) &= a^2 + a\sqrt{b} + a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\times\sqrt{b}\right)\\ &= a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2\end{aligned}$$

Jadi, . $\left(a+\sqrt{b}\right)^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh:

$$\left(a-\sqrt{b}\right)^2 = a^2 - 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$$

Contoh 4.10

$$\begin{aligned}\left(3+\sqrt{3}\right)^2 &= 3^2 + \left(2\times 3\times\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= 9 + 6\sqrt{3} + 3\\ &= 12 + 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(4-\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 - \left(2 \times 4 \times \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$= 16 - 8\sqrt{5} + 5$$
$$= 21 - 8\sqrt{5}$$

4) *Pemangkatan bentuk* $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ *dan* $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$

Pada dasarnya penyelesaian dari pemangkatan bentuk $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ dan $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ sama dengan penyelesaian pemangkatan bentuk $\left(a+\sqrt{b}\right)^2$ dan $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$. Sehingga:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) + \left(\sqrt{b}\right)^2$$
$$= a + 2\sqrt{a \times b} + b$$

Jadi, . $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a \times b} + b$

Dengan cara yang sama, maka akan diperoleh:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{a \times b} + b$$

Contoh 4.11

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{5 \times 7} + 7$$
$$= 12 + 2\sqrt{35}$$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{3 \times 2} + 2$$
$$= 6 + 2\sqrt{6}$$

2. Hubungan Bentuk Akar dengan Pangkat Pecahan

Pada pembahasan yang lalu telah disebutkan beberapa sifat dari bilangan berpangkat bulat positif. Sifat-sifat tersebut akan digunakan untuk mencari hubungan antara bentuk akar dengan pangkat pecahan. Sifat yang dimaksud adalah .

$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$

Selain sifat tersebut terdapat sifat lain, yaitu:

Jika $a^p = a^q$ maka $p = q$ dengan $a > 0$, $a \neq 1$

a. Hubungan $\sqrt[n]{a}$ dengan

Perhatikan pembahasan berikut.

1) Misalkan $\sqrt{a} = a^p$. Jika kedua ruas dikuadratkan, maka diperoleh:

2) Misalkan . Jika kedua ruas dipangkatkan 3, maka diperoleh:

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^p\right)^2$
$\Leftrightarrow \quad a = a^{2p}$
$\Leftrightarrow \quad 1 = 2p$
$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$

Jadi, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

(Karena kedua ruas sama, maka pangkatnya juga sama)

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^p\right)^3$
$\Leftrightarrow \quad a = a^{3p}$
$\Leftrightarrow \quad 1 = 3p$
$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{3}$

Jadi, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

3) Misalkan $\sqrt[n]{a} = a^p$. Jika kedua ruas dipangkatkan n, maka diperoleh:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^p\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad a = a^{np}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = np$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{n}$$

Jadi, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk *a* bilangan real tidak nol dan *n* bilangan bulat positif, maka:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

b. Hubungan $\sqrt[n]{a^m}$ dengan $a^{\frac{m}{n}}$

Berdasarkan kesimpulan pangkat pecahan $a^{\frac{1}{n}}$, selanjutnya akan diperluas pada pangkat pecahan dalam bentuk

yang lebih umum $a^{\frac{m}{n}}$. Untuk tujuan itu, perhatikan pembahasan berikut.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, menggunakan sifat pangkat bulat positif

$\Leftrightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ menggunakan pangkat pecahan $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, menggunakan sifat pemangkatan bentuk

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \sqrt[p]{a^n}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk *a* bilangan real tidak nol, *m* bilangan bulat, dan *n* bilangan asli, $n \geq 2$, maka: . $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Contoh 4.12

Ubahlah bentuk akar berikut ke dalam bentuk pangkat pecahan.

a. $\sqrt[3]{4}$

b. $\sqrt[3]{5^3}$

c. $\sqrt[4]{2^3}$

d. $\sqrt[3]{2^6}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$

$= 2^{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt{5^3} = \sqrt[2]{5^3}$

$= 5^{\frac{3}{2}}$

c. $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

d. $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}$

$= 2^2 = 4$

Latihan 4.3

1. Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan dari bentuk akar berikut.

   a. $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

   b. $4\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5} - 5^{1\frac{1}{3}}$

   c. $3\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$

   d. $\sqrt{50} - 4\sqrt{5} - \sqrt{125}$

2. Hitunglah perkalian bentuk akar berikut.

   a. $\sqrt{5}\left(3\sqrt{2} - 3\sqrt{7}\right)$

   b. $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{18}\right)$

3. Tentukan hasil dari bentuk akar berikut.

   a. $\left(\sqrt[4]{5^3}\right)^2$

   b. $\left(-2\sqrt[4]{3x}\right)^{-3}$

   c. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$

   d. $\left(2p\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

4. Tentukan hasil perhitungan dari operasi berikut.

   a. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{2}$

   b. $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$

5. Sederhanakan . $\sqrt{4a^2b^3} + \sqrt{a^3b^4} + \sqrt{9a^2b^5}$

D. Merasionalkan Bentuk Akar Kuadrat

Dalam sebuah bilangan pecahan penyebutnya dapat berupa bentuk akar. Pecahan $\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2+\sqrt{3}}$, adalah beberapa contoh pecahan yang penyebutnya berbentuk akar. Penyebut pecahan seperti itu dapat dirasionalkan. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan tergantung dari bentuk pecahan tersebut.

1. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Untuk menghitung nilai $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ada cara yang lebih mudah daripada harus membagi 6 dengan nilai pendekatan dari $\sqrt{3}$, yaitu dengan merasionalkan penyebut. Cara ini dapat dilakukan dengan menggunakan sifat perkalian bentuk akar:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$
$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a\times a}=a$$

Selanjutnya pecahan diubah bentuknya $\frac{6}{\sqrt{3}}$ dengan memanipulasi aljabar.

Contoh 4.13

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{3}} &= \frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Mengubah $\frac{6}{\sqrt{3}}$ menjadi $\frac{3\sqrt{6}}{3}$ atau $2\sqrt{3}$ disebut *merasionalkan penyebut pecahan*. Dari uraian di atas, dapat kita ambil kesimpulan bahwa pecahar $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (*a* bilangan rasional dan *b* bentuk akar), bagian penyebut dapat dirasionalkan, dengan mengalikan pecahan tersebut dengan $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ sehingga pecahan tersebut menjadi:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Contoh 4.14

1. $\frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

   $= \frac{12\sqrt{5}}{5}$

2. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

   $= \frac{\sqrt{10}}{2}$

2. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$

Untuk merasionalkan penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, terlebih dahulu perhatikan perkalian pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dengan *b* dan *c* bilangan rasional dan $\sqrt{c}$ bentuk akar.

$$\begin{aligned}\left(b+\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{c}\right) &= b^2 - b\sqrt{c} + b\sqrt{c} - c \\ &= b^2 - c\end{aligned}$$

Karena b dan c bilangan rasional, maka hasil kali pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dan $\left(b-\sqrt{c}\right)$ juga rasional. Pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dan $\left(b-\sqrt{c}\right)$ disebut bentuk-bentuk akar sekawan atau dikatakan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ sekawan dari $\left(b-\sqrt{c}\right)$ dan sebaliknya.

Dengan menggunakan sifat perkalian bentuk-bentuk akar sekawan maka penyebut bentuk $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ dapat dirasionalkan dengan memanipulasi aljabar.

a. Pecahan Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ diubah menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+\sqrt{c}} &= \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} \\ &= \frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}\end{aligned}$$

b. *Pecahan Bentuk* $\dfrac{a}{b-\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\dfrac{a}{b-\sqrt{c}}$ disederhanakan menjadi:

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \times \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}$$
$$= \frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$$

Contoh 4.15

1. $$\frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3}{5-\sqrt{2}} \times \frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3\left(5+\sqrt{2}\right)}{5^2-2}$$
$$= \frac{15+3\sqrt{2}}{23}$$

2. $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-2^2}$$
$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{-1}$$
$$= -\left(3+2\sqrt{3}\right)$$

3. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ dapat dirasionalkan dengan menggunakan manipulasi aljabar yang hampir sama dengan merasionalkan penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$.

a. *Pecahan Bentuk* $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Untuk pecahan pembilang dan penyebut dikalikan . $\sqrt{b}-\sqrt{c}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

b. *Pecahan Bentuk* $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ pembilang dan penyebut dikalikan $\left(\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Contoh 4.16

1. $$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}$$
$$= \frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3}$$

2. $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{3-7}$$
$$= \frac{3+\sqrt{21}}{-4}$$

Latihan 4.4

Rasionalkan penyebut bentuk akar berikut.

1. $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$
2. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $\dfrac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{5\sqrt{3}-5}{3-\sqrt{2}}$
5. $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-5}$
6. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}=\sqrt{3}}$

Rangkuman

1. Untuk bilangan bulat a dengan $a \neq 0$, bilangan cacah m dan m berlaku
   a. $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$
   b. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   c. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$
   d. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
   e. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
   f. $a^0 = 1$
   g. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
   h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2. Operasi hitung bentuk akar
   a. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
   b. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$
   c. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
   d. $\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}$
   e. $\left(\sqrt[p]{a}\right)^{-n} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}$
   f. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
   g. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$
   h. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
   i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, atau *d*!

1. 7^3 artinya . . . .
   a. 7×3 c. 3×7
   b. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ d. $7 \times 7 \times 7$
2. Nilai dari $(–6)^3$ adalah . . . .
   a. 64 c. –216
   b. –12 d. 216
3. Nilai dari $–5^4$ adalah . . . .
   a. –625 c. 325
   b. 225 d. 625
4. Bentuk $3^{–2}$ bila diubah ke dalam bentuk pangkat bilangan bulat positif adalah . . . .
   a. 3 c. $\frac{1}{3^2}$
   a
   b. –34 d. $-\frac{1}{2^4}$
5. Bentuk $(3a)^{–4}$ bila diubah ke dalam bentuk pangkat bilangan positif adalah . . . .
   a. $–81a$ c. $-\frac{1}{2a^4}$
   b. $–3a^4$ d. $-\frac{1}{8a^4}$
6. Nilai dari $(–7)^2$ adalah . . . .
   a. 49 c. –49
   b. $\frac{1}{7}$ d. –14

7. Hasil dari $-\frac{4}{25}$ adalah . . . .

a. $-\frac{4}{25}$

b. $\frac{25}{3}$

c. $\frac{5}{2}$

d. $\frac{2}{5}$

8. Bentuk akar dari $a^{\frac{n}{m}}$ adalah . . . .

a. $\sqrt[m]{a^n}$

b. $\sqrt[n]{a^m}$

c. $\sqrt[mn]{a^n}$

d. $\sqrt{a}$

9. Bentuk pangkat dari $\sqrt[3]{26^2}$ adalah . . . .

a. 26

b. $26^{\frac{2}{3}}$

c. $\frac{1}{\sqrt[3]{26^2}}$

d. $\frac{1}{26^{\frac{2}{3}}}$

10. Nilai dari $2^{3^{\frac{2}{3}}}$ adalah . . . .

a. 24

b. 16

c. 4

d. 2

11. Hasil dari $8^2 \times 4^{-4}$ adalah . . . .

a. $\frac{1}{4}$

b. 4

c. 8

d. 64

12. Hasil dari $[(3n)^{-2}]^3$ adalah . . . .

a. $16n^{-8}$

b. $64m^{-8}$

c. $\frac{1}{64n^6}$

d. $\frac{256}{n^6}$

13. $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{0}$ = ...

a. 1

b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{1}{25}$

d. 0

14. Jika $a - b = 2$, maka nilai dari $(b - a)^6$ adalah . . . .

a. $\frac{1}{64}$

b. 64

c. $-\frac{1}{64}$

d. –64

15. Diketahui , $\left(\frac{1}{3}\right)^{4} = 3^{x}$ maka nilai x adalah . . . .

a. –13

b. –4

c. 4

d. 13

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Hasil dari $\frac{3^2 \times 7^2 \times 2^4}{5^2 \times 2^2 \times 8}$ adalah . . . .
2. Bentuk sederhana dari $\frac{(3b^{-8})(5c^{-8})}{45b^{-3}c^{2}}$ adalah . . . .
3. Nilai x jika $2^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ adalah . . . .
4. Nilai dari $\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{6}$ = ...
5. Bentuk rasional dan sederhana dari $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$ adalah . . . .